

EU-ImpactMod - opis modelu

MACIEJ BUKOWSKI, SEBASTIAN DYRDA, PAWEŁ KOWAL



ibs

INSTYTUT BADAŃ STRUKTURALNYCH

1 Wprowadzenie

Model DSGE gospodarki polskiej którego konstrukcję opisujemy poniżej modelem małej gospodarki otwartej z egzogeniczną zagranicą. Przy jego konstrukcji główny nacisk położono na rozbudowę segmentu fiskalnego, tak aby możliwe było dokonanie wszechstronnej oceny wpływu funduszy strukturalnych UE na gospodarkę. Dodatkowo model został wyposażony w podstawowe frykcje realne w postaci sztywności konsumpcji (formowanie się nawyków konsumpcyjnych), inwestycji (koszty inwestycji), rynku pracy (poszukiwania i negocjacje płacowe) i wynagrodzeń (stopniowe dostosowywanie się płac do płacy równowagi po wystąpieniu szoku). Jako, że przedmiotem analizy jest polityka fiskalna, a nie pieniężna model jest modelem gospodarki realnej i nie uwzględnia pieniądza.

2 Gospodarstwa domowe

2.1 Użyteczność

Zakładamy, że gospodarstwa domowe maksymalizują dożywotnią użyteczność czerpaną z konsumpcji dóbr i usług C_t oraz z czasu wolnego $1 - L_t - L_t^E$, gdzie L_t to intensywna podaż pracy, zaś L_t^E to czas jaki gospodarstwo domowe przeznaczają na edukację. W modelu zakładamy niewalrasowski charakter rynku pracy, pozwalający na odzwierciedlenie jego specyfiki w postaci niepełnego równoważenia się popytu na pracę z jej podażą. W konsekwencji w każdym z okresów gospodarstwo domowe może znaleźć się w jednym z trzech stanów: zatrudnienie, bezrobocie i bierność zawodowa. Podobnie jak u Cheroni i Langota (2002) w każdym z okresów gospodarstwo wybiera ekstensywną podaż pracy N_t . Innymi słowy w każdym okresie każdy członek gospodarstwa domowego z prawdopodobieństwem N_t znajdzie zatrudnienie, zaś z prawdopodobieństwem $1 - N_t$ będzie bezrobotny lub nieaktywny. Gospodarstwo domowe maksymalizuje użyteczność w cyklu życia, biorąc pod uwagę swoje ograniczenie budżetowe, użyteczności chwilowe, równanie definiujące sumę konsumpcji w każdym ze stanów na rynku pracy oraz równanie ewolucji zatrudnienia w gospodarce

$$N_t = (1 - s)N_{t-1} + \phi_t L_t^S$$

Parametr s oznacza egzogeniczną stopę destrukcji miejsc pracy, zmienna ϕ_t to prawdopodobieństwo znalezienia pracy, zaś L_t^S to zasób poszukujących pracy w danym okresie, na który składają się bezrobotni z poprzedniego okresu oraz pracujący, których miejsca pracy zostały zlikwidowane. Problem maksymalizacji użyteczności z konsumpcji i pracy w cyklu życia jest dany przez następującą loterię

$$\begin{aligned} \max E_0 \sum_{t=0}^{\infty} \beta^t U_t \\ U_t = E_0 \sum_{t=0}^{\infty} \beta^t N_t u_E(C_t^E, L_t, L_t^E) + (1 - N_t) u_U(C_t^U, L_t, L_t^E) \end{aligned}$$

gdzie E_0 jest operatorem oczekiwań formułowanych w chwili $t = 0$, u_E i u_U są funkcjami chwilowej użyteczności, C_t^E jest konsumpcją w stanie zatrudnienia,

C_t^U jest konsumpcją bezrobotnych i nieaktywnych członków gospodarstwa domowego, zaś parameter β określa stopę preferencji czasowej. Użyteczność chwilowa gospodarstwa domowego jest funkcją stanu w jakim znajduje się ono na rynku pracy. I tak w stanie zatrudnienia dana jest przez następujący agregator o stałej elastyczności substytucji między swoimi komponentami (agregator typu CES)

$$u_E = \frac{(\alpha(C_t^E)^\omega + (1 - \alpha)((K_t^H)^\zeta(1 - L_t - L_t^E))^\omega)^{\frac{1-\sigma}{\omega}}}{1 - \sigma}$$

gdzie parametr σ jest odwrotnością międzyokresowej elastyczności substytucji konsumpcji, α określa udział konsumpcji wobec czasu wolnego, zaś wewnątrzokresowa elastyczność substytucji pomiędzy czasem wolnym a konsumpcją jest dana przez $1/1 - \omega$. Parametr ζ jest miarą awersji do ryzyka wobec czasu wolnego, K_t^H , w nadmiarze w stosunku do ryzyka wobec konsumpcji, co ma istotne znaczenie w procesie wyceny aktywów. Dwie cechy założonej funkcji użyteczności warte są podkreślenia. Po pierwsze czas wolny wchodzi do funkcji użyteczności w sposób nierozdzielny względem konsumpcji. Implikuje to, że stosunek konsumenta do ryzyka wobec konsumpcji będzie wahał się w czasie i będzie zależał od zasobu czasu wolnego jaki jest do jego dyspozycji. Po drugie, podobnie jak u Heckmanna (1976) oraz Ortigueiry (2000), gospodarstwa domowe dysponujące wyższym poziomem kapitału ludzkiego czerpią wyższą użyteczność z czasu wolnego. Tego rodzaju modelowanie kapitału ludzkiego ma u podstaw poza rynkowe korzyści z kapitału ludzkiego. Przykładowo prace empiryczne sugerują, że poziom kapitału ludzkiego jest dodatnio skorelowany ze stanem zdrowia, dalszą oczekiwaną długością życia, jakością potomstwa, efektywnością konsumpcji czy też jakością dóbr produkowanych w procesie produkcji domowej. Wolfe i Haveman (2001) wskazują, że pozarynkowe korzyści z kapitału ludzkiego mogą być równie istotne, jak te wynikające wprost z aktywności zawodowej gospodarstwa domowego.

W przypadku osób bezrobotnych i niezatrudnionych użyteczność chwilowa jest sformułowana analogicznie

$$u_U = \frac{(\alpha(C_t^U)^\omega + (1 - \alpha)(K_t^H)^\zeta(1 - e_t - L_t^E))^\omega)^{\frac{1-\sigma}{\omega}}}{1 - \sigma}$$

przy czym e_t oznacza wysiłek przeznaczony na poszukiwanie zatrudnienia. Na konsumpcję w każdym z trzech stanów na rynku pracy składa się konsumpcja prywatna C_t^{NG} oraz konsumpcja rządowa C_t^G , która może być utożsamiana z dostarczonymi przez rząd dobrami publicznymi. Innymi słowy gospodarstwa domowe czerpią użyteczność z kompozytowego dobra konsumpcyjnego, które dla każdego zatrudnionego członka gospodarstwa domowego przyjmuje postać:

$$C_t^E = \left(\alpha_c^{\rho_c} (C_t^{E,NG})^{\left(\frac{\rho_c-1}{\rho_c}\right)} + (1 - \alpha_c)^{\rho_c} (C_t^G)^{\left(\frac{\rho_c-1}{\rho_c}\right)} \right)^{\frac{\rho_c}{\rho_c-1}}$$

gdzie α_c determinuje udział konsumpcji prywatnej w konsumpcji ogółem, natomiast ρ_c wyznacza elastyczność substytucji między konsumpcją prywatną a rządową. Kompozytowy indeks konsumpcji bezrobotnych i nieaktywnych członków gospodarstwa domowego jest dany analogicznie:

$$C_t^U = \left(\alpha_c^{\rho_c} (C_t^{U,NG})^{\left(\frac{\rho_c-1}{\rho_c}\right)} + (1 - \alpha_c)^{\rho_c} (C_t^G)^{\left(\frac{\rho_c-1}{\rho_c}\right)} \right)^{\frac{\rho_c}{\rho_c-1}}$$

2.2 Ograniczenie budżetowe

Reprezentatywne gospodarstwo domowe podejmuje decyzję o ścieżce konsumpcji w kolejnych punktach czasu biorąc pod uwagę swoje międzyokresowe ograniczenie budżetowe, na które składają się z jednej strony jego dochody, INC_t , z drugiej zaś wydatki, EXP_t . W konsekwencji ograniczenie budżetowe w każdej chwili $t \geq 0$ przyjmuje postać:

$$EXP_t = INC_t$$

przy czym na dochody gospodarstwa domowego składają się dochody z pracy, INC_t^L , kapitału, INC_t^K i transferów, INC_t^T

$$INC_t = INC_t^L + INC_t^K + INC_t^T$$

Dochody gospodarstwa domowego są dzielone między konsumpcję i oszczędności

$$EXP_t = (1 + \tau_t^C)C_t + Q_t B_t + q_t Q_t^F B_t^F RP_t$$

gdzie C_t jest sumą konsumpcji zatrudnionych, bezrobotnych i nieaktywnych członków gospodarstwa domowego

$$C_t = N_{t-1}C_t^{E,NG} + (1 - N^{t-1})C^{U,NG}$$

Zmienna B_t określa popyt na sprzedawane z dyskontem obligacje rządowe gospodarstwa domowego po cenie Q_t . Z kolei B_t^F to popyt sektora prywatnego na obligacje zagraniczne po cenie Q_t^F , gdzie q_t jest realnym kursem walutowym czyli ceną zagranicznego dobra finalnego wyrażoną w jednostkach dobra krajowego. Zmienna RP_t określa premię za ryzyko w przypadku operacji na rynku obligacji zagranicznych, która może być związana na przykład z zagrożeniem niewypłacalności danego kraju. Przyjmuje ona postać

$$RP_t = \exp\left(\frac{\phi_{RP} q_t B_t^F}{Y_t}\right)$$

gdzie Y_t określa produkt krajowy, zaś ϕ_{RP} to parametr określający skalę premii za ryzyko. Wprowadzenie premii za ryzyko różnicując cenę obligacji krajowych i zagranicznych umożliwia określenie optymalnej alokacji długu między obie kategorie papierów wartościowych na poziomie gospodarstwa domowego.

Na dochody gospodarstwa domowego składają się dochody z pracy po opodatkowaniu, dochody kapitałowe w postaci zysków wypłacanych przez firmy oraz odsetek od aktywów finansowych (obligacji), a także dochody z transferów społecznych dla osób bezrobotnych i nieaktywnych finansowanych przez rząd krajowy z podatków oraz transferów z Unii Europejskiej wypłacanych głównie w ramach wspólnej polityki rolnej. Formalnie rzecz biorąc

$$INC_t^L = (1 - \tau_t^L(W_t, K_t^H, L_t, N_t, \Gamma^F))(W_t K_t^H L_t N_t + \Gamma_t^F)$$

$$INC_t^K = (1 - \tau_t^F)\Pi_t + B_{t-1} + q_t B_{t-1}^F$$

$$INC_t^T = S_t + U_t S_t^U + CAP_t^{UE}$$

gdzie W_t to płaca realna płacona za jednostkę efektywnej pracy $K_t^H L_t N_t$, zaś Γ_t^F określa odprawy jakie są wypłacane gospodarstwu domowemu w wyniku zwolnień. Z kolei Π_t jest wartością dywidend wypłaconych przez firmy, a $B_{t-1} +$

$q_t B_{t-1}^F$ dochodem ze sprzedaży obligacji kupionych w poprzednim okresie z dyskontem. Gospodarstwo domowe otrzymuje dwa rodzaje transferów od rządu: transfery ryczałtowe, S_t , pełniące przed wszystkim rolę domknięcia ograniczenia budżetowego rządu oraz transfery dla bezrobotnych i nieaktywnych członków gospodarstwa domowego, S_t^U . Zmienna CAP_t^{EU} określa wielkość transferów (dotacji bezpośrednich) do gospodarstw domowych zatrudnionych w sektorze rolniczym, wynikających ze wspólnej polityki rolnej Unii Europejskiej.

Model uwzględnia rozbudowaną politykę fiskalną. Gospodarstwo domowe płaci podatek od wynagrodzeń $\tau_t^L(W_t, K_t^H, L_t, N_t, \Gamma^F)$, gdzie krańcowa stopa podatkowa jest funkcją dochodu z pracy, zaś parametr b określa skalę progresji

$$\tau_t^L(W_t, K_t^H, L_t, N_t) = \bar{\tau}_L + (b/2)W_t K_t^H L_t N_t$$

Poza opodatkowaniem płacy, reprezentatywne gospodarstwo odprowadza podatek od zysków, τ_t^F , oraz podatek konsumpcyjny τ_t^C , który może być utożsamiany z modelowym ujęciem podatku pośredniego typu VAT.

2.3 Kapitał ludzki

Ponadto gospodarstwa domowe rozwiązują problem maksymalizacji użyteczności przy zbiorze informacyjnym zawierającym równanie ewolucji kapitału ludzkiego

$$K_t^H = (1 - \delta_t^H)K_{t-1}^H + LBD_t + EDU_t$$

Akumulacja kapitału ludzkiego następuje dwoma kanałami. Po pierwsze kapitał ludzki akumuluje się w procesie nabywania wiedzy przez praktykę, LBD_t , po drugie w procesie nauczania EDU_t , na który gospodarstwa domowe poświęcają część zasobu czasu wolnego. Mechanizm nabywania wiedzy przez praktykę jest funkcją rosnącą względem wydatków rządowych na edukację pracujących, ekstensywnej i intensywnej podaży pracy, oraz zakumulowanego dotychczas kapitału ludzkiego

$$LBD_t = \alpha_H ((K_{t-1}^H)^{\alpha_{LBD}} (G_t^E)^{\beta_{LBD}} (L_t N_{t-1})^{\gamma_{LBD}})$$

gdzie parametr α_H określa wagę z jaką nabywanie wiedzy przez praktykę podnosi zasób kapitału ludzkiego, G_t^E to wydatki rządowe na szkolenia pracowników. Przyjęcie postaci funkcyjnej, w której mechanizm nabywania wiedzy przez praktykę jest wzmacniany przez zasób zakumulowanego kapitału ludzkiego K_{t-1}^H jest ilustracją generowania przez ten rodzaj kapitału dodatnich efektów zewnętrznych, potwierdzonych w pracach empirycznych.

Akumulacja wiedzy poprzez system edukacyjny jest pochodną efektywności systemu edukacyjnego oraz indywidualnego wysiłku edukacyjnego gospodarstwa domowego, co ilustruje równanie

$$EDU_t = (1 - \alpha_H) (f_t^H (L_t^E)^{\rho_{EDU}})$$

gdzie parametr ρ_{Ed} określa elastyczność rezultatów kształcenia względem nakładu pracy. Efektywność wykorzystania czasu poświęconego na naukę przez gospodarstwa domowe jest funkcją jakości usług edukacyjnych dostarczanych przez rząd oraz zasobu już zakumulowanego kapitału ludzkiego, który podobnie jak w przypadku mechanizmu nabywania wiedzy przez praktykę generuje pozytywny efekt zewnętrzny. Zależności te dają się ująć przez

$$f_t^H = (K_{t-1}^H)^{\alpha_f} (Y_t^E)^{\beta_f} (L_t^E)^{\beta_f - 1}$$

gdzie Y_t^E jest produktem sektora edukacyjnego opisanego w dalszej części rozdziału.

3 Firmy

Zakładamy istnienie kilku etapów produkcji dobra finalnego. Po pierwsze mamy firmy krajowe, produkujące dobra homogeniczne na doskonale konkurencyjnym rynku w trzech sektorach: rolnictwie (A), przemyśle i usługach eksportowalnych (I) oraz budownictwie i usługach nieeksportowalnych (S). Na drugim poziomie mamy do czynienia z firmą agregującą krajowe dobra wymienne, wyprodukowane w dwóch pierwszych sektorach. Na trzecim poziomie operują dwie firmy, firma agregująca krajowe dobra niewymienne oraz firma agregująca dobra wymienne krajowe i zagraniczne. Na tym poziomie dochodzi do wymiany z zagranicą. Firma na poziomie czwartym biorąc za czynniki produkcji dobra wymienne i niewymienne, produkuje dobro finalne konsumowane przez gospodarstwa domowe.

3.1 Produkcja dóbr finalnych

Firma agregatowa operująca na czwartym poziomie produkuje dobro finalne, konsumowane przez gospodarstwa domowe. Rynek jest doskonale konkurencyjny. Technologia produkcji jest funkcją typu CES, której argumentami są dobra wytworzone przez firmę agregującą dobra wymienne (krajowe i zagraniczne) oraz firmę agregującą dobra niewymienne. W konsekwencji problem maksymalizacyjny firmy produkującej dobro finalne jest problemem wewnątrzokresowym i przyjmuje postać:

$$\begin{aligned} & \max \Pi_t \\ \Pi_t &= P_t Y_t - P_t^T Y_t^T - P_t^N Y_t^N \end{aligned}$$

pod warunkiem:

$$Y_t = \left((\alpha_F)^{\frac{1}{\rho_F}} (Y^T)^{\frac{\rho_F-1}{\rho_F}} + (1 - \alpha_F)^{\frac{1}{\rho_F}} (Y^N)^{\frac{\rho_F-1}{\rho_F}} \right)^{\frac{\rho_F}{\rho_F-1}}$$

przy czym ceny P_t^T i P_t^N są z punktu widzenia firmy dane, a tym samym Indeks cen dóbr finalnych definiujący agregatowy poziom cen jest dany przez

$$P_t = (\alpha_F (P_t^T)^{1-\rho_F} + (1 - \alpha_F) (P_t^N)^{1-\rho_F})^{\frac{1}{1-\rho_F}}$$

Bez straty ogólności można przyjąć $P_t = 1$ co definiuje *numeraire* dla cen względnych w modelowanej gospodarce.

3.2 Produkcja dóbr wymiennych i niewymiennych

Na trzecim poziomie działają dwie firmy agregujące odpowiednio krajowe i zagraniczne dobra wymienne oraz dobra niewymienne. W firmie agregującej dobra wymienne krajowe i zagraniczne dochodzi do wymiany między krajami. Firma jest doskonale konkurencyjna. Maksymalizuje zysk przy ograniczeniu zadany funkcją typu CES, której argumentami są dobra wymienne krajowe

oraz zagraniczne o danych (z punktu widzenia firmy) cenach. Daje to problem maksymalizacyjny w postaci

$$\begin{aligned} & \max \Pi^T \\ \Pi^T &= P_t^T Y_t^T - P_t^D Y_t^{DH} - q_t P_t^F Y_t^F \end{aligned}$$

pod warunkiem:

$$Y_t^T = \left(\alpha_T^{\frac{1}{\theta_T}} (Y_t^{DH})^{\frac{\theta_T-1}{\theta_T}} + (1 - \alpha_T)^{\frac{1}{\theta_T}} (Y_t^F)^{\frac{\theta_T-1}{\theta_T}} \right)^{\frac{\theta_T}{\theta_T-1}}$$

gdzie Y_t^{DH} jest sprzedaną na rynku krajowym, zagregowaną produkcją krajowych dóbr wymiennych, zakupioną po cenie P^D od firmy z poziomu drugiego, zaś Y_t^F to produkcja dóbr wymiennych zagranicznych, zakupiona po cenie $q_t P_t^F$ od firmy zagranicznej z poziomu drugiego. Indeks cenowy dóbr wymiennych w kraju jest dany przez:

$$P_t^T = (\alpha_T (P_t^D)^{1-\theta_T} + (1 - \alpha_T) (q_t P_t^F)^{1-\theta_T})^{\frac{1}{1-\theta_T}}$$

Pozostała część dóbr krajowych dóbr wymiennych Y_t^{DF} jest eksportowana, wobec czego równowaga na rynku krajowych dóbr wymiennych wymaga

$$Y_t^D = Y_t^{DH} + Y_t^{DF}$$

Popyt na dobra eksportowane jest brany przez firmę na poziomie trzecim za dany. Jest on wynikiem rozwiązania analogicznego problemu optymalizacyjnego w lustrzanej gospodarce zagranicy, co jest opisane w dalszej części rozdziału.

Firma agregująca dobra niewymienne dysponuje liniową funkcją produkcji, co de facto oznacza przekazywanie dóbr z sektora usług nieeksportowalnych do firmy agregatywnej na poziomie czwartym. Problem maksymalizacyjny sprowadza się więc do prostego zapisu:

$$\Pi_t = P_t^N Y_t^N - P_t^S Y_t^S$$

gdzie:

$$Y_t^S = \left[\int_0^1 Y_{it}^S \frac{\rho_S}{\rho_S-1} di \right]^{\frac{\rho_S-1}{\rho_S}}$$

Ponadto z liniowości technologii firmy agregującej, $Y_t^N = Y_t^S$, wynika, że:

$$P_t^N = P_t^S$$

Rozwiązanie problemu maksymalizacji zysku daje odpowiednio popyt na dobra produkowane w firmach sektora usług nieeksportowalnych oraz poziom cen dóbr niewymienialnych w kraju:

$$Y_{it}^S = \left(\frac{P_{it}^S}{P_t^S} \right)^{-\rho_S} Y_t^S \quad P_t^S = \left[\int_0^1 (P_{it}^S)^{1-\rho_S} di \right]^{\frac{1}{1-\rho_S}}$$

3.3 Produkcja dóbr wymiennych krajowych

Na poziomie drugim działa firma agregująca krajowe homogeniczne dobra wymienne, wyprodukowane w rolnictwie, przemyśle i usługach eksportowalnych. Rynek jest doskonale konkurencyjny, więc firma nie ma wpływu na ceny. Firma maksymalizuje zysk (w równowadze równy zero) dany przez

$$\Pi_t^D = P_t^D Y_t^D - P_t^A Y_t^A - P_t^I Y_t^I$$

gdzie P_t^D jest ceną zagregowanego dobra wymiennego, P_t^j indeksem cenowym dobra homogenicznego, zaś Y_t^j produkcją w sektorze $j \in \{A, I\}$. Funkcja produkcji jest kompozytem, gdzie kolejnymi czynnikami produkcji są dobra homogeniczne odpowiednio wyprodukowane w rolnictwie i przemyśle oraz usługach eksportowalnych.

$$Y_t^D = \left(\alpha_D^{\frac{1}{\rho_D}} (Y_t^A)^{\frac{\rho_D}{\rho_D-1}} + (1 - \alpha_D)^{\frac{1}{\rho_D}} (Y_t^I)^{\frac{\rho_D}{\rho_D-1}} \right)^{\frac{\rho_D-1}{\rho_D}}$$

Warunek maksymalizacji zysku implikuje poziom cen dóbr wymiennych oraz popyt na dobra homogeniczne, dany odpowiednio:

$$P_t^D = \left(\alpha_D (P_t^A)^{1-\rho_D} + (1 - \alpha_D) (P_t^I)^{1-\rho_D} \right)^{\frac{1}{1-\rho_D}}$$

$$Y_t^A = \alpha_D \left(\frac{P_t^A}{P_t^D} \right)^{-\rho_D} Y_t^D \quad Y_t^I = (1 - \alpha_D) \left(\frac{P_t^I}{P_t^D} \right)^{-\rho_D} Y_t^D$$

Zarówno ceny jak i produkty obu sektorów dane są przez indeksy typu CES agregujące odpowiednio ceny i produkcję continuum firm działającym w każdym z nich

$$P_t^A = \left(\int_0^1 (P_{it}^A(i))^{1-\rho_A} di \right)^{\frac{1}{1-\rho_A}} \quad P_t^I = \left(\int_0^1 (P_{it}^I(i))^{1-\rho_I} di \right)^{\frac{1}{1-\rho_I}}$$

$$Y_t^A = \left(\int_0^1 (Y_{it}^A)^{\frac{\rho_A}{\rho_A-1}} di \right)^{\frac{\rho_A-1}{\rho_A}} \quad Y_t^I = \left(\int_0^1 (Y_{it}^I)^{\frac{\rho_I}{\rho_I-1}} di \right)^{\frac{\rho_I-1}{\rho_I}}$$

W równowadze produkcja wszystkich firm działających na poziomie sektorów oraz ich ceny są identyczne można więc rozpatrywać ich odpowiednik w postaci reprezentatywnego przedsiębiorstwa.

3.4 Produkcja sektorowa

Na najniższym poziomie zakładamy istnienie trzech sektorów: rolnictwa, przemysłu wraz z usługami eksportowalnymi i usług nieeksportowalnych wraz z budownictwem, w których operują firmy doskonale konkurencyjne. Firmy te są właścicielami kapitału fizycznego, będącego jednym z czynników produkcji, ponadto zatrudniają pracę oferowaną przez gospodarstwa domowe. Pozostałymi czynnikami produkcji są akumulowany przez rząd kapitał infrastrukturalny oraz kapitał ludzki. W każdym z okresów firmy otwierają pewną liczbę wakatów, które podlegają dopasowywaniu do poszukujących pracy. Utrzymywanie wakatów wiąże się dla firmy z kosztem pomniejszającym bezpośrednio jej zysk. Ponadto w

każdym z okresów część miejsc podlega destrukcji według egzogenicznej stopy. Destrukcja miejsc pracy jest kosztowna, zwolnienie każdego pracownika pomniejsza zysk firmy o odsetek funduszu płac. Koszty zwolnienia pracownika są zewnętrzne w stosunku do firmy, która jako taka nie ma na nie wpływu, co oddaje na poziomie modelowym możliwość uwarunkowania prawa pracy. Wreszcie firmy odprowadzają podatek od zysków τ^K , który jest pomniejszany o odsetek inwestycji możliwych do odpisania od podstawy opodatkowania. Konstrukcja podatku odpowiada podatkowi od kapitału CIT. Reprezentatywna firma działająca w sektorze $i \in \{A, I, S\}$ maksymalizuje zdyskontowaną sumę zysków od chwili $t = 0$ do nieskończoności:

$$PV_0 = E_0 \sum_{t=0}^{\infty} \Lambda_t \Pi_t^i$$

$$\Pi_t^i = P_t^i Y_t^i - I_t^i - L_t^i K_t^H L_{t-1}^{M,i} W_t - D_t^i - \Gamma_t^{V,i} - \Gamma_t^{F,i}$$

gdzie zmienne indeksowane indeksem i są specyficzne dla każdego sektora. Λ_t jest czynnikiem dyskontującym brany przez firmy jako dany. W związku z tym, że przedsiębiorstwa są właścicielami kapitału, zysk Π_t^i w równowadze jest różny od zera. Optymalny plan produkcji jest z punktu widzenia gospodarstwa domowego wyznaczony przez stopę dyskontową Λ_t spełniającą:

$$\Lambda_t = \frac{\partial U}{\partial \Pi_t^i}$$

Innymi słowy czynnik dyskontowy jest bezpośrednio związany z krańcową użytecznością z konsumpcji $\Lambda_t = \beta^t \frac{\lambda_t}{\lambda_0}$ gdzie λ_t określa krańcową użyteczność z dodatkowej jednostki konsumpcji w chwili t . Z kolei P_t^i to cena na każdym z rynków sektorowych, I_t^i to inwestycje danej firmy w i -tym sektorze, $L_t^{M,i}$ to liczba zaangażowanych pracowników, W_t jest płacą jednakową dla wszystkich sektorów, D_t^i podatkiem od kapitału, zaś $\Gamma_t^{V,i}$ oraz $\Gamma_t^{F,i}$ odpowiednio kosztami nieobsadzonego wakatów oraz kosztami zwolnienia pracownika. Zakładamy, że koszty zwolnień są proporcjonalne do płac osób zwalnianych, mają więc charakter odpraw. Z kolei koszty wakatów są proporcjonalne do ich liczby, co można interpretować jako koszt nieobsadzonych miejsc pracy. Mają one charakter kosztu alternatywnego (utraconego produktu) i jako takie pomniejszają ostatecznie PKB gospodarki. Firmy są właścicielami kapitału, stąd przy rozwiązywaniu wyżej zadanego problemu biorą pod uwagę jako ograniczenie równanie ewolucji kapitału fizycznego wraz z wypukłymi kosztami dostosowań

$$K_t^i = (1 - \delta^K) K_{t-1}^i + \left(1 - 1/2 \left(\frac{I_{t-1}^i}{I_t^i} \right)^2 \right) I_t^i$$

Produkt w każdym z sektorów jest wytwarzany przy pomocy funkcji produkcji o stałych korzyściach skali typu Cobba Douglasa:

$$Y^i = A_t^i (K_{t-1}^i)^{\alpha_i} (K_{t-1}^{INF})^{\gamma_i} (K^H L_t^i L_t^{M,i})^{1-\alpha_i-\gamma_i}$$

Podatek od kapitału D_t^i przyjmuje postać:

$$D_t^i = \tau_t^K (P_t^i Y_t^i - L_t^i K_t^H L_{t-1}^{M,i} W_t - (\theta + \theta_t^{UE}) I_t^i)$$

Parametr θ odpowiada za część wydatków inwestycyjnych, która może być odliczona od podstawy opodatkowania na mocy uregulowań prawnych. Z kolei θ_t^{UE} odzwierciedla skalę dodatkowego strumienia inwestycji wynikającego z absorpcji przez firmę funduszy strukturalnych z Unii Europejskiej w ramach programu Innowacyjna Gospodarka, która efektywnie zmniejsza skalę środków własnych niezbędnych do zwiększenia kapitału o jednostkę. Wpływ tego programu na inwestycje firm jest przybliżany w modelu udziałem subsydiów dla przedsiębiorstw w produkcji

$$\theta_t^{UE} = \left(\frac{S_t^{UE}}{Y_t}\right)^{\gamma_s}$$

W każdym z okresów część miejsc pracy ulega destrukcji, według stałej stopy s . Jednocześnie na początku każdego okresu firmy otwierają wakat V_t . Zapełnienie wakatów jest zależne od efektywności dopasowywania oraz zewnętrznego wobec firm prawdopodobieństwa χ_t . W konsekwencji zatrudnienie ewoluuje następująco

$$L_t^{M,i} = (1-s)L_{t-1}^{M,i} + \chi_t V_t^i$$

Prawdopodobieństwo zapełnienia wakatów jest determinowane w module rynku pracy modelu.

4 Dynamika i dopasowania na rynku pracy

Rynek pracy w niniejszym modelu posiada cechy niewalrasowskie, co implikuje pojawianie się bezrobocia jako wyniku równowagi ogólnej. Niewalrasowski rynek pracy został wprowadzony poprzez mechanizm poszukiwań na rynku pracy, podobnie jak u Mortensena i Pissaridesa (1994) czy też Cherona i Langota (2002). Płaca jest kształtowana na rynku w wyniku indywidualnych negocjacji pracownika i firmy tzw. negocjacji Nasha. Ogłaszane przez firmy wakatów oraz zgłaszana podaż pracy są dopasowywane przy pomocy tzw. funkcji dopasowań, będącej funkcją jednorodną stopnia jeden, podobnie jak u Mortensena i Pissaridesa (1994) oraz Pissaridesa (2000):

$$M_t = \sigma_m (V_t^T)^\phi (L_t^S)^{1-\phi}$$

gdzie V_t^T jest sumą wakatów w rolnictwie, przemyśle i usługach eksportowalnych, usługach nieeksportowalnych, sektorze edukacyjnym oraz sektorze rządowym. L_t^S jest liczbą osób szukających zatrudnienia, czyli zasobem bezrobotnych oraz pracujących, których miejsca pracy uległy destrukcji. Z kolei σ_m to zmienna określająca efektywność dopasowania, zadana procesem stochastycznym typu AR(1).

Powyższa funkcja Cobba-Douglasa opisująca dopasowania na rynku pracy spełnia wszystkie warunki wyszczególnione przez Mortensena(1989).

- $M_t(V_t, 0) = M_t(0, L_t^S) = 0$ Nowe zatrudnienia wymagają zarówno dodatniego zagregowanego poziomu aktywnie poszukujących, jak i dodatniego zagregowanego poziomu wakatów w gospodarce.
- $\frac{\partial M_t}{\partial V_t} > 0$ $\frac{\partial M_t}{\partial (L_t^S)} > 0$ Liczba dopasowań na rynku pracy wzrasta wraz ze wzrostem liczby wakatów oraz aktywnie poszukujących pracy.

- $\frac{\partial(\frac{M_t}{L_t^S})}{\partial(L_t^S)} > 0$ Wraz ze wzrostem liczby aktywnie poszukujących, liczba zatrudnionych na jednego poszukującego maleje.
- $M_t(V_t, L_t^S) = (L_t^S)M_T(1, \frac{V_t}{L_t^S})$ Funkcja jest homogeniczna stopnia 1, co implikuje stałe korzyści skali.

Szansa zapewnienia wakatów jest zależna od efektywności dopasowań na rynku pracy oraz liczby otwartych w danym okresie wakatów:

$$\chi_t = \frac{M_t}{V_t^T}$$

Z kolei prawdopodobieństwo znalezienia pracy przez bezrobotnego jest funkcją efektywności dopasowań oraz liczby poszukujących pracy:

$$\phi_t = \frac{M_t}{1 - N_{t-1}}$$

Populacja w wieku produktywnym jest znormalizowana w modelu do jedności, co implikuje

$$U_t + N_t + NA_t = 1$$

Zasób nieaktywnych zawodowo jest w określony w sposób egzogeniczny, uzupełniony o parametr nadający nieznacznie antycykliczny charakter bierności zawodowej, co jest zgodne z empirycznymi pracami na temat elastyczności podaży pracy. Liczba nieaktywnych zawodowo ewoluuje w modelu zgodnie z równaniem:

$$NA_t = NA_{SS} - \sigma_{NA}(N_t - N_{SS})$$

Jako, że ekstensywna podaż pracy N_t jest w modelu poszukiwań procykliczna, zasób biernych zawodowo jest antycykliczny.

5 Negocjacje płacowe

Płace ustalają się w wyniku zdecentralizowanych negocjacji Nasha, które decydują o podziale pomiędzy firmę a pracownika nadwyżki płacy ponad koszt krańcowy, wynikającej z likwidacji wakatów w firmie oraz braku konieczności dalszego poszukiwania pracy przez bezrobotnego. Nadwyżka ta wyrażona w dochodach konsumpcyjnych przyjmuje postać:

$$SP_t = \frac{\Omega_t^H}{\lambda_t} + \Omega_t^F$$

gdzie Ω_t^H to krańcowa zmiana funkcji wartości gospodarstwa domowego wynikająca z zatrudnienia kolejnego członka gospodarstwa domowego, z kolei Ω_t^F to krańcowa zmiana funkcji wartości firmy wynikająca z zapewnienia wakatów. λ_t jest mnożnikiem Lagrange'a pozwalającym wyrazić obydwie części sumy w tych samych jednostkach. Ponadto zakładamy, że negocjacje pomiędzy pracownikiem a firmą mają miejsce w każdym z okresów. Podział zdefiniowanej nadwyżki zależy od siły przetargowej obu stron negocjacji. Niech $0 < \xi < 1$ będzie udziałem firmy w nadwyżce, wówczas reguła podziału implikuje:

$$\xi \frac{\Omega_t^H}{\lambda_t} = (1 - \xi)\Omega_t^F$$

Równanie to wyznacza równowagowy poziom płacy w modelu W_t . W obecności frykcji na rynku pracy, doskonała substytucja pomiędzy podażą pracy dostarczaną przez różne gospodarstwa domowe, nie implikuje jednakowej płacy za jednostkę efektywnej pracy. Stąd optymalny poziom intensywnej podaży pracy jest wynikiem maksymalizacji nadwyżki SP_t względem L_t :

$$0 = \frac{\partial SP_t}{\partial L_t}$$

6 Wakaty

Producenci dóbr homogenicznych w poszczególnych sektorach działają na rynku doskonale konkurencyjnym. Wynika stąd, że ich decyzje o zatrudnieniu nie wpływają na ewolucję zagregowanego zatrudnienia w danym sektorze $L_t^{M,i}$, którą biorą w swoim ograniczeniu za daną

$$L_t^{M,i} = (1 - s)L_{t-1}^{M,i} + \chi_t V_t^i$$

Prawdopodobieństwo zapełnienia wakatów χ_t jest przez firmę przyjęte za dane i stałe w każdym z sektorów, z kolei decyzja o liczbie otwieranych wakatów w każdym z okresów jest sterowaniem firmy. Firmy ponoszą również koszty związane z istnieniem nieobsadzonych wakatów oraz koszty związane z likwidacją miejsc pracy. Wyrażone są one w utraconych jednostkach konsumpcji, które pomniejszają bezpośrednio zysk firmy w sposób następujący:

$$\Gamma_t^{H,i} = \sigma_{H,t} \chi_t V_t^i Y_t^i$$

$$\Gamma_t^{F,i} = \sigma_{F,t} (1 - s) L_t^{M,i} W_t K_t^H L_t^i$$

gdzie zmienne $\sigma_{H,t}, \sigma_{F,t}$ oddają wpływ regulacji rynku pracy na koszty wakatów oraz koszty zwolnienia pracownika.

7 Sektor rządowy i fundusze strukturalne UE

7.1 Ograniczenie budżetowe rządu

Polityka fiskalna jest realizowana w zadanym modelu kilkoma kanałami. Po pierwsze na dochody rządu składają się zysk z wyemitowanych w danym okresie obligacji oraz podatki: podatek od wynagrodzenia z pracy τ_t^L , podatek od dywidend τ_t^F , podatek konsumpcyjny τ_t^C , wreszcie podatek kapitałowy τ_t^K . Po drugie środki wynikające z napływu funduszy europejskich T^{UE} , które wymagają zaangażowania środków publicznych (współfinansowania) w części $\psi_u e$. Transfery unijne są rozdysponowane pomiędzy poszczególne kategorie wydatków rządu w zgodzie z filozofią programów operacyjnych, powiększając w większości wypadków już zaangażowane w danym obszarze środki publiczne. Po stronie wydatków rząd finansuje kolejno:

- wydatki na edukację zasilające proces nabywania wiedzy przez praktykę (aktywne polityki rynku pracy) - G_t^{ED} ,
- inwestycje w infrastrukturę edukacyjną - $I_t^{E,D}$,

- inwestycje w kapitał publiczny - $I_t^{G,D}$,
- inwestycje w infrastrukturę - I_t^{INF} ,
- wydatki na płace w sektorze wytwarzającym dobra publiczne - G_t^W ,
- wydatki na płace w sektorze edukacyjnym - G_t^T ,
- wydatki na obsługę rządu oraz na sektor nie dostarczający dóbr publicznych zasilających użyteczność konsumenta - $G_t^{G,D}$,
- transfery ogólne do gospodarstw domowych - S_t
- transfery dla osób bezrobotnych - S_t^U
- odsetki od długu z poprzedniego okresu - B_{t-1}

Ponadto wydatkami rządu są także wydatki finansowane ze środków UE w tym

- środki wydatkowane głównie w ramach Programu Operacyjnego Kapitał Ludzki a w znacznie mniejszym stopniu także programów Innowacyjna Gospodarka i Rozwój Polski Wschodniej przeznaczone na zadania związane z podnoszeniem umiejętności ludzi dorosłych - $G_t^{E,UE}$,
- wydatki niezbędne do obsługi funduszy strukturalnych finansowane głównie w ramach Pomocy Technicznej oraz priorytetów administracyjnych w pozostałych programach operacyjnych - $G_t^{G,UE}$,
- środki współfinansujące tworzenie infrastruktury edukacyjnej pochodzące z regionalnych programów rozwoju, PO Innowacyjna gospodarka i PO Kapitał Ludzki - $I_t^{E,UE}$,
- inwestycje w kapitał publiczny (głównie infrastrukturę ochrony środowiska, komunalną i ochrony zdrowia) finansowane głównie z PO Infrastruktura i Środowisko oraz programów regionalnych - $I_t^{G,UE}$,
- inwestycje w infrastrukturę transportową oraz łącznościowo informacyjną finansowane w ramach PO Infrastruktura i Środowisko, programów regionalnych, PO Rozwój Polski Wschodniej a w mniejszym stopniu także PO Innowacyjna gospodarka - $I_t^{INF,UE}$,
- wydatki finansowane przeznaczone głównie na kulturę - $G_t^{W,UE}$
- wydatki z PO Kapitał Ludzki i PO Innowacyjna Gospodarka przeznaczone na dofinansowanie sektora edukacyjnego i jego funkcji naukowej w tym zwłaszcza na wynagrodzenia dla instruktorów - $G_t^{T,UE}$

Poszczególne wydatki rządowe finansowane ze środków krajowych oraz środki funduszy strukturalnych łącznie tworzą następujących 7 kategorii wydatków

$$\begin{aligned}
G_t^E &= G_t^{ED} + G_t^{E,UE} \\
G_t^G &= G_t^{G,D} + G_t^{G,UE} \\
G_t^W &= G_t^{W,D} + G_t^{W,UE} \\
G_t^T &= G_t^{T,D} + G_t^{T,UE} \\
I_t^E &= I_t^{E,D} + I_t^{E,UE} \\
I_t^G &= I_t^{G,D} + I_t^{G,UE} \\
I_t^{INF} &= I_t^{INF,D} + I_t^{INF,UE}
\end{aligned}$$

Z kolei do sektora prywatnego bezpośrednio trafiają subsydia dla przedsiębiorstw (także sektora rolniczego), S_t^{UE} oraz środki Wspólnej Polityki Rolnej CAP_t^{UE} .

Ograniczenie budżetowe rządu w każdym okresie wymaga zrównania przychodów, INC_t^G , z sumą wydatków na krajowe wydatki publiczne, EXP_t^G , transfery do gospodarstw domowych, EXP_t^T oraz wydatki na transfery i spłatę długu, EXP_t^T

$$EXP_t^G + EXP_t^T + T_t^{UE} = INC_t^G$$

poszczególne grupy wydatków zdefiniowane są następująco

$$\begin{aligned}
EXP_t^G &= G_t^E + G_t^W + G_t^G + G_t^T + I_t^E + I_t^G + I_t^{INF} \\
EXP_t^T &= S_{t-1} + U_t S_t^U + B_{t-1} \\
T_t^{UE} &= \Psi^{UE} \left(G_t^{E,UE} + G_t^{G,UE} + G_t^{W,UE} + G_t^{T,UE} + I_t^{E,UE} + I_t^{G,UE} + I_t^{INF,UE} \right)
\end{aligned}$$

przy czym parametr $\Psi^{UE} = (1 + \psi^{UE})$ odzwierciedla fakt współfinansowania funduszy strukturalnych środkami krajowymi. Z kolei przychody rządu obejmują dochody z podatków, sprzedaży obligacji oraz transferów z UE

$$INC_t^G = \tau_t^F \Pi_t + \tau_t^L (K_t^H L_t W_{t-1} N_{t-1} + \Gamma_t^F) + D_t + \tau_t^C C_t + Q_t B_t + T_t^{UE}$$

W modelu zakładamy, że polityka fiskalna jest zadana egzogenicznie przez zestaw procesów stochastycznych typu AR(1) w przypadku wszystkich rodzajów podatków oraz wszystkich wydatków rządu, zarówno finansowanych z przychodów podatkowych jak i programów unijnych, (prócz transferów ryczałtowych) oraz proces typu AR(2) w przypadku długu publicznego. Ograniczenie budżetowe rządu jest spełnione poprzez dostosowanie transferów społecznych S_T do pozostałych zmiennych fiskalnych, co jest ekonomicznie równoważne zmianom w ryczałtowemu opodatkowaniu.

7.2 Konsumpcja publiczna

Sektor rządowy produkuje dobra konsumpcyjne zasilające bezpośrednio użyteczność gospodarstwa domowego. Mają więc one charakter dóbr publicznych a więc w ich konsumpcji uczestniczą w jednakowym stopniu wszystkie gospodarstwa domowe. Czynnikiem produkcji są kapitał publiczny oraz praca. Kapitał publiczny

jest akumulowany zgodnie z równaniem ruchu

$$K_t^G = (1 - \delta^{KG})K_{t-1}^G + \left(1 - 1/2 \left(\frac{I_{t-1}^G}{I_t^G}\right)^2\right) I_t^G$$

gdzie I_t^G jest sumą inwestycji krajowych w kapitał publiczny w stanie ustalonym oraz inwestycji finansowanych ze środków unijnych, co daje się wyrazić przez:

$$\begin{aligned} I_t^G &= \Upsilon_t^G I_{SS}^G + I_t^{G,UE} \\ I_t^{G,UE} &= \Upsilon_t^{G,UE} I_{SS}^{G,UE} \end{aligned}$$

gdzie Υ_t^G i $\Upsilon_t^{G,UE}$ to zmienne określające procentowe odchylenie od stanu ustalonego (szok egzogeniczny) inwestycji finansowanych odpowiednio ze środków krajowych i unijnych, zaś I_{SS}^G i $I_{SS}^{G,UE}$ to inwestycje w stanie ustalonym. Podobnie jak w sektorze prywatnym wysoka dynamika inwestycji wiąże się z koniecznością ponoszenia kosztów dostosowania kapitału. Rząd określa z góry zatrudnienie w sektorze produkującym dobra publiczne, biorąc płacę ukształtowaną na rynku za daną. To determinuje z kolei krajowe wydatki na płace w sektorze publicznym $G_t^{W,D}$. Podobnie jest w wypadku miejsc pracy finansowanych ze środków UE. Miejsca pracy w sektorze publicznym, analogicznie jak w sektorze prywatnym podlegają procesowi destrukcji. W każdym z okresów rząd otwiera także określoną liczbę wakatów, które podlegają procesowi dopasowywania do poszukujących pracy. Stąd dynamika zatrudnienia zarówno finansowanego odpowiednio z wydatków krajowych i unijnych jest dana równaniami

$$\begin{aligned} L_t^G &= (1 - s)L_{t-1}^G + \chi_t V_t^G \\ L_t^{G,UE} &= (1 - s)L_{t-1}^{G,UE} + \chi_t V_t^{G,UE} \end{aligned}$$

gdzie s jest stopą destrukcji miejsc pracy, χ_t prawdopodobieństwem zapełnienia wakatów, V_t^G , $V_t^{G,UE}$ liczbami otwartych wakatów w danym okresie. Dobra publiczne są produkowane przy użyciu technologii typu CES

$$C_t^G = \left((\alpha^{KG})^{\rho^{KG}} (K_{t-1}^G)^{\frac{\rho^{KG}-1}{\rho^{KG}}} + (1 - \alpha^{KG})^{\rho^{KG}} (K_t^H (L_t^G + L_t^{G,UE}) L_t)^{\frac{\rho^{KG}-1}{\rho^{KG}}} \right)^{\frac{\rho^{KG}}{\rho^{KG}-1}}$$

przy czym parametry α^{KG} i ρ^{KG} określają pośrednio udział kapitału publicznego w produkcji oraz elastyczność kapitału i pracy w sektorze publicznym.

7.3 Sektor edukacyjny

Poza produkcją dóbr publicznych sektor rządowy jest zaangażowany w produkcję usług edukacyjnych, przyczyniających się do akumulacji kapitału ludzkiego. Wytwarzanie usług edukacyjnych odbywa się przy użyciu kapitału edukacyjnego K^E generującego pozytywne efekty zewnętrzne czasu poświęconego przez gospodarstwa domowe na naukę oraz podaży pracy w sektorze edukacyjnym. Podaż pracy w sektorze edukacyjnym jest opłacana z dwóch źródeł, podobnie jak w sektorze wytwarzającym konsumpcję publiczną. Po pierwsze jest finansowana z wydatków krajowych na wynagrodzenia w sektorze edukacyjnym, po drugie opłacana jest z funduszy strukturalnych UE. Analogicznie jak w sektorze wytwarzającym dobra publiczne, miejsca pracy w sektorze edukacyjnym podlegają

destrukcji. Ponadto w każdym z okresów sektor edukacyjny otwiera wakat, które podlegają procesowi dopasowywania na rynku pracy. W konsekwencji zatrudnienie L_t^T oraz $L_t^{T,UE}$ ewolucje wedle formuły

$$\begin{aligned} L_t^T &= (1-s)L_{t-1}^T + \chi_t V_t^T \\ L_t^{T,UE} &= (1-s)L_{t-1}^{T,UE} + \chi_t V_t^{T,UE} \end{aligned}$$

gdzie δ^E jest stopą destrukcji miejsc pracy, χ_t prawdopodobieństwem zapełnienia wakat, V^T oraz $V_t^{T,UE}$ liczbą otwartych wakatów w danym okresie. Źródłem akumulacji kapitału edukacyjnego są inwestycje sektora rządowego w infrastrukturę edukacyjną, stąd kapitał ten podlega następującej ewolucji

$$K^E = (1-\delta^E)K_{t-1}^E + \left(1 - 1/2 \left(\frac{I_{t-1}^E}{I_t^E}\right)^2\right) I_t^E$$

gdzie I_t^E jest sumą inwestycji krajowych w kapitał edukacyjny oraz inwestycji finansowanych ze środków unijnych

$$\begin{aligned} I_t^E &= \Upsilon_t^E I_{SS}^G + I_t^{E,UE} \\ I_t^{E,UE} &= \Upsilon_t^{E,UE} I_{SS}^{E,UE} \end{aligned}$$

gdzie Υ_t^E i $\Upsilon_t^{E,UE}$ podobnie jak poprzednio określają procentowe odchylenie obu kategorii inwestycji od stanów ustalonych I_{SS}^E i $I_{SS}^{E,UE}$. Podobnie jak poprzednio wysoka dynamika inwestycji wiąże się z analogiczną jak w sektorze prywatnym koniecznością ponoszenia znacznych kosztów dostosowania kapitału. Przy zadanych powyżej dynamikach zatrudnienia i zasobu kapitału, usługi edukacyjne są wytwarzane przy pomocy funkcji produkcji o stałych korzyściach skali

$$Y_t^E = (K_{t-1}^E)^{\gamma^{E1}} (L^E)^{\gamma^{E2}} \left((L_{t-1}^T + L_{t-1}^{T,UE}) L_t \right)^{1-\gamma^{E1}-\gamma^{E2}}$$

Produkt edukacyjny Y^E przyczynia się do akumulowania przez gospodarstwo domowe kapitału ludzkiego w sposób opisany wcześniej.

7.4 Infrastruktura

Poza usługami edukacyjnymi oraz produkcją dóbr publicznych, rząd inwestując w infrastrukturę zwiększa zasób kapitału, będącego jednym z czynników produkcji dla firm ze wszystkich trzech sektorów. Równanie akumulacji kapitału infrastrukturalnego przyjmuje podobnie jak w przypadku innych rodzajów kapitału publicznego postać

$$K_t^{INF} = (1-\delta^{INF})K_{t-1}^{INF} + \left(1 + 1/2 \left(\frac{I_{t-1}^{INF}}{I_t^{INF}}\right)^2\right) I_t^{INF}$$

gdzie I_t^{INF} jest sumą inwestycji finansowanych ze środków krajowych oraz unijnych

$$\begin{aligned} I_t^{INF} &= \Upsilon_t^{INF} I_{SS}^G + I_t^{INF,UE} \\ I_t^{INF,UE} &= \Upsilon_t^{INF,UE} I_{SS}^{E,UE} \end{aligned}$$

gdzie Υ_t^{INF} i $\Upsilon_t^{INF,UE}$ podobnie jak poprzednio określają procentowe odchylenie obu kategorii inwestycji od stanów ustalonych I_{SS}^{INF} i $I_{SS}^{INF,UE}$. Podobnie jak w przypadku kapitału publicznego i edukacyjnego implementacja inwestycji infrastrukturalnych wymaga poniesienia kosztów uruchomienia.

8 Domknięcie modelu i szoki egzogeniczne

8.1 Zagranica

Domknięcie modelu wymaga określenia popytu zagranicznego na dobra krajowe. Będziemy zakładać, że gospodarka zagranicy jest analogiczna jak gospodarka krajowa. Wówczas problem optymalizacyjny zagranicznego sektora finalnych dóbr wymiennych prowadzi do warunku:

$$Y_t^{DF} = \left(\frac{P^D}{q_t P_t^{F,T}} \right)^{-\theta_F} Y_t^{F,T}$$

gdzie $P_t^{F,T}$ jest ceną zagranicznych dóbr wymiennych wyrażoną w walucie obcej, natomiast $Y_t^{F,T}$ definiuje popyt na dobra wymienne zagranicą. Stąd mamy, że eksport dóbr jest dany przez:

$$X_t = P_t^D Y_t^{DF}$$

Z kolei import dóbr jest determinowany przez popyt na dobro zagraniczne zgłaszany przez krajowego producenta dobra wymiennego, kurs walutowy i cenę zagranicą

$$Z_t = q_t P_t^F Y_t^F$$

przy czym bez straty ogólności możemy przyjąć $Y_t^F = 1$ ustalając jednostkę produktu zagranicą. Równowaga na rynku walutowym wymaga odzwierciedlenia rachunku obrotów bieżących $NX_t = X_t - Z_t$ w rachunku obrotów kapitałowych, stąd równowaga na rynku walutowym implikuje:

$$P_t^D Y_{DF} - q_t P_t^F Y_t^F = q_t (Q_t^F B_t^F R P_t - B_{t-1}^F)$$

Ponadto terms of trade i realny kurs walutowy są dane przez:

$$TOT_t = \frac{q_t P_t^F}{P_t^D}$$

$$RER_t = \frac{q_t P_t^{F,T}}{P_t}$$

Zakładamy, że gospodarka krajowa jest na tyle mała w porównaniu z gospodarką zagraniczną, że cena finalnych zagranicznych dóbr wymiennych oraz popyt zagregowany zagranicy na finalne dobra wymienne są egzogeniczne.

8.2 Zmienne makroekonomiczne

Domknięcie modelu wymaga określenia jednostki produktu i jednostki cen. Bez straty ogólności możemy założyć, że $P_t = 1$, a więc jednostką cen w modelu

jest cena rynkowego dobra finalnego. W skład całkowitego produktu w gospodarce wchodzi dobra rynkowe i nierynkowe. Obie kategorie dóbr wyceniane są po cenie P_t . Ich cena względna wynosi więc jeden. Z tym, że o ile produkt rynkowy wynosi Y_t to produkt nierynkowy wynika z zatrudnienia części siły roboczej w sektorze edukacyjnym oraz sektorze produkującym dobra publiczne. Produkt tych sektorów dla celów rachunkowości produktu wycenia się jako sumę wypłaconych wynagrodzeń. W konsekwencji ostateczny produkt gospodarki jest dany przez

$$GDP_t = Y_t + W_t K_t^H L_t (L_t^T + L_t^{T,UE} + L_t^G + L_t^{G,UE})$$

Pozwala to na ustalenie jednostki produktu w stanie ustalonym $GDP_t^{SS} = 1$. Konstrukcja modelu zapewnia istnienie równowagi na rynku dóbr i rynku pracy. Trzeba jednak pamiętać, że fakt istnienia frykcji na rynku pracy i niezapełnionych wakatów powoduje utratę części produktu w wysokości $\Gamma_t^{H,i}$ w każdym z sektorów. Ponadto transfery do ludności w postaci wspólnej polityki rolnej także wpływają na warunek czyszczenia się rynku dóbr, który jest zdefiniowany przez

$$GDP_t = C_t + I_t + G_t + PRV_t + NX_t - VC_t^{TOT}$$

gdzie C_t to całkowita konsumpcja dóbr rynkowych gospodarstwa domowego, I_t całkowite inwestycje prywatne, G_t całkowite wydatki rządowe na dobra i usługi (w tym wkład własny rządu przeznaczony na współfinansowanie projektów finansowanych z funduszy UE), PRV_t transferami z UE trafiającymi bezpośrednio do osób prywatnych (równymi CAP_t), NX_t oznacza export netto, zaś VC_t^{TOT} to całkowity koszt utrzymywania wakatów w firmach. W przypadku rynku pracy warunek czyszczenia się rynku oznacza, że

$$N_t = L_t^M + L_t^T + L_t^G + L_t^{T,UE} + L_t^{G,UE}$$

gdzie L_t^M oznacza całkowite zatrudnienie w firmach, a pozostałe zmienne zdefiniowane są jak poprzednio. Konstrukcja modelu zapewnia, że oba warunki czyszczenia się rynku produktu i pracy spełnione są automatycznie.

8.3 Szoki egzogeniczne

W modelu zakładamy istnienie szeregu egzogenicznych szoków. Z punktu widzenia celu opracowania kluczowe są szoki fiskalne, w tym przede wszystkim szoki związane z wydatkami finansowanymi transferami unijnymi. Szoki są zadane przez zestaw procesów stochastycznych typu AR(1) w przypadku wszystkich rodzajów podatków, wszystkich wydatków rządu, zarówno finansowanych z przychodów podatkowych jak i programów unijnych, szoków technologicznych agregatowych oraz sektorowych oraz szoków na rynku pracy. Przykładowy proces typu AR(1) dla zmiennej losowej J_t przybiera postać:

$$J_t = \Upsilon_t J_{SS}$$

$$\ln(\Upsilon_t) = \rho_J \ln(\Upsilon_{t-1}) + \epsilon_t^J$$

gdzie parametr ρ_J oznacza autokorelację szoku, zaś parametr J_{SS}^E wyznacza poziom zmiennej J_t w stanie ustalonym. Zakładamy, że ϵ_t^J jest niezależną od analogicznych zmiennych dla innych procesów stochastycznych zmienną losową. Zmienne typu ϵ_t^J charakteryzują się dla wszystkich rodzajów procesów założonych w modelu takim samym rozkładem.

Odmianą postaci szoku zakładamy w przypadku funduszy unijnych. Ma to związek z tym, że jak należy oczekiwać ich wykorzystanie będzie stopniowo, z roku na rok narastać aż do osiągnięcia po kilku latach maksimum. Założenie to inkorporujemy w model specyfikując odpowiednie procesy stochastyczne w postaci

$$J_t^{UE} = \Upsilon_t^{UE} J_{SS}^{UE}$$

$$\ln(\Upsilon_t^{UE}) = \rho_J^{UE} \ln(\Upsilon_{t-1}^{UE}) + \xi_t^{J,UE}$$

$$\xi_t^{J,UE} = \rho_J^{\xi,UE} \ln(\xi_{t-1}^{J,UE}) + \epsilon_t^{J,UE}$$

gdzie parametr ρ_J^{UE} , $\rho_J^{\xi,UE}$ oznaczają autokorelację obu powiązanych procesów stochastycznych, zaś parametr J_{SS}^{UE} wyznacza poziom zmiennej J_t^{UE} w stanie ustalonym. Zakładamy, że ϵ_t^J jest niezależną od analogicznych zmiennych dla innych procesów stochastycznych zmienną losową. Zmienne typu ϵ_t^J charakteryzują się dla wszystkich rodzajów procesów założonych w modelu takim samym rozkładem normalnym.

9 Algorytm numeryczny

W rozważanym modelu ograniczyliśmy zapis jedynie do opisu problemów optymalizacyjnych podmiotów, które determinują zachowanie się całej gospodarki. W kolejnym kroku, w sposób zadany przez teorię optymalnego sterowania, wyznacza się decyzje podmiotów tak, aby rozwiązywały one wyspecyfikowane problemy optymalizacyjne. Ich określenie możliwe jest jedynie w sposób przybliżony, z użyciem analizy numerycznej.

Zastosowany algorytm numeryczny został oparty na metodzie perturbacyjnej autorstwa Judda (1996). W wyniku jej zastosowania otrzymujemy optymalne sterowanie, będące regułą określającą decyzje podmiotów w chwili t jako funkcję zmiennych stanu (zmiennych, których ewolucje podmioty biorą za daną). Sterowanie to musi cechować się stabilnością, mianowicie musi zapewniać, że w długim okresie, po wystąpieniu przejściowego szoku, gospodarka powróci do stanu ustalonego.

Takie rozwiązanie zapewnia spełnienie tzw. warunków transversalności, które dla klarowności wywodu zostały pominięte w specyfikacji modelu. Algorytm składa się z kilku zasadniczych kroków. Po pierwsze wyznaczony zostaje w sposób numeryczny stan ustalony w warunkach braku niepewności. W kolejnym kroku wyznaczane są rozwinięcia optymalnych sterowań podmiotów w szereg Taylora wokół deterministycznego stanu ustalonego. Wyznaczany jest jedynie pierwszy składnik rozwinięcia. Dzieje się to w dwóch etapach. W pierwszym etapie, przy użyciu pakietu obliczeń symbolicznych, wyznaczane są warunki opisujące pierwszy człon rozwinięcia w szereg Taylora. W ten sposób uzyskany zostaje układ równań macierzowych. W drugim etapie układ ten jest rozwiązywany. To wyznacza optymalne sterowania, które z kolei umożliwiają badanie reakcji gospodarki na szoki. Zachowanie się gospodarki w długim okresie, po zaistnieniu permanentnego szoku, jest badane poprzez porównanie dwóch stanów ustalonych, jednego przed zaistnieniem szoku, drugiego po jego zaistnieniu. Dzięki temu nieliniowe własności modelu zostają uwzględnione. Model został rozwiązany przy użyciu pakietu obliczeń numerycznych FORMA służącego do rozwiązywania modeli klasy DSGE autorstwa Pawła Kowala z Instytutu Badań Strukturalnych, w którym jest dalej rozwijany.